OCCASION

This publication has been made available to the public on the occasion of the 50th anniversary of the United Nations Industrial Development Organisation.

DISCLAIMER

This document has been produced without formal United Nations editing. The designations employed and the presentation of the material in this document do not imply the expression of any opinion whatsoever on the part of the Secretariat of the United Nations Industrial Development Organization (UNIDO) concerning the legal status of any country, territory, city or area or of its authorities, or concerning the delimitation of its frontiers or boundaries, or its economic system or degree of development. Designations such as "developed", "industrialized" and "developing" are intended for statistical convenience and do not necessarily express a judgment about the stage reached by a particular country or area in the development process. Mention of firm names or commercial products does not constitute an endorsement by UNIDO.

FAIR USE POLICY

Any part of this publication may be quoted and referenced for educational and research purposes without additional permission from UNIDO. However, those who make use of quoting and referencing this publication are requested to follow the Fair Use Policy of giving due credit to UNIDO.

CONTACT

Please contact publications@unido.org for further information concerning UNIDO publications.

For more information about UNIDO, please visit us at www.unido.org

UNITED NATIONS INDUSTRIAL DEVELOPMENT ORGANIZATION
Vienna International Centre, P.O. Box 300, 1400 Vienna, Austria
Tel: (+43-1) 26026-0 · www.unido.org · unido@unido.org

15674

PROGRAMA DE LAS NACIONES UNIDAS PARA EL DESARROLLO

Distribución Limitada

Mayo de 1986
Español

ASISTENCIA A LA PEQUEÑA Y MEDIANA
INDUSTRIA (SANTA FE) Fase III
Proyecto ARG/81/004

Informe Final*

Argentina.

DESARROLLO E IMPLEMENTACION DE UN PROGRAMA DE COMPUTACION PARA TRANSMISION DE CALOR POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS EN REGIMEN LINEAL, ESTACIONARIO Y TRANSITORIO

PREPARADO PARA EL GOBIERNO DE LA REPUBLICA ARGENTINA POR LA ORGANIZACION DE LAS NACIONES UNIDAS PARA EL DESARROLLO INDUSTRIAL (O N U D I)

Según el estudio de el Sr.ING. JOSE RAMON ORENGO
Puesto DP/ARG/81/004/17-01

---

* El contenido de este informe refleja sólo la opinión del autor y no necesariamente la de la sede de la O N U D I (Viena)

4

INDICE

1.- INTRODUCCION

2.- RESUMEN

3.- ACTIVIDADES DESARROLLADAS

3.1. DESARROLLO DEL PROBLEMA DE TRANSMISION DE CALOR.

3.1.1. Ecuaciones clásicas para transmisión de calor.

3.1.2. Ecuaciones incrementales "paso a paso".

3.2. DISCRETIZACION EN ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES DE TRANSMISION DE CALOR.

3.2.1. Régimen Estacionario Lineal.

3.2.2. Régimen Transitorio Lineal.

3.2.3. Cambios de estado.

3.2.4. Conclusiones.

3.3. PROGRAMAS DE COMPUTACION PARA TRANSMISION DE CALOR POR ELEMENTOS FINITOS

3.3.1. Régimen Estacionario Lineal.
Generalidades, Técnicas de resolución y Organigrama.

3.3.2. Régimen transitorio lineal.
Generalidades, Técnicas de resolución y Organigrama.

4.- RECOMENDACIONES

5.- ASISTENCIA TECNICA

El desarrollo se realiza en dos etapas, correspondien
do la primera de ellas a transmisión de calor en régimen /
estacionario (independiente del tiempo) y la segunda de //
ellas a la transmisión de calor en régimen transitorio, es
decir tratado como problema tiempo - dependiente.-

El asesor tuvo como contrapartes, a tiempo parcial, a
la Ing. Marina Villalonga jefe del Centro de Computos de /
la D.A.T. y al Ing. Eduardo Gherbezza perteneciente a la /
sección Asistencia Técnica, Cálculo y Diseño de la D.A.T.

Se deja expresa constancia del agradecimiento al Ing.
Juan Manso de las Moras, cuya versación en el tema desarro
llado ha permitido un fluido intercambio de información e
ideas que condujeron a un mejor desarrollo del presente //
trabajo.

2.- RESUMEN

Como ya se ha mencionado el presente trabajo se desarrolla en dos etapas.

En la primera de ellas se desarrollan los lineamientos y se implementa un programa de computación para el tratamiento del problema de transmisión de calor en régimen estacionario, es decir, independiente del tiempo, en la computadora H P 1000 de la D.A.T.

La implementación se realiza dentro del campo lineal, / es decir considerando que los parámetros de los materiales / que intervienen son independientes de la temperatura.

La geometría del cuerpo cuya distribución de temperaturas se quiere conocer se define con la misma técnica que se ha utilizado en los trabajos anteriores de análisis estructural. Para ello se determinan las coordenadas de puntos característicos del cuerpo, denominados puntos nodales, puntos // que se definen para conectar los elementos resultantes de // discretizar el cuerpo en estudio a través de una malla de elementos finitos.

Dicha discretización permite, no sólo la simulación numérica de geometrías de forma cualquiera, sinó también la representación correcta de los distintos materiales que intervienen en la conformación del cuerpo en estudio, posibilitando / la introducción, región por región, de distintos parámetros / para los materiales, como por ejemplo la conductividad térmica o calor latente (para régimen transitorio).

Las condiciones de borde podrán estar impuestas en términos de temperaturas, condiciones de convección o de flujo de calor ingresando al cuerpo.

Bajo todas estas condiciones, el programa permite calcular la distribución de temperaturas en el cuerpo.

1.- INTRODUCCION

Dentro del proyecto que ONUDI ha implementado en la República Argentina para el Desarrollo Tecnológico de la pequeña y mediana industria de la Provincia de Santa Fe, el Ing. José Ramón Orengo fue contratado para el desarrollo e implementación de programas de computación para el análisis numérico en problemas de Transmisión de calor mediante el Método de los Elementos Finitos, con vistas a instrumentar una im-/ portante herramienta en tareas de diseño y verificación de / elementos o sistemas en donde el conocimiento del fenómeno / de transferencia de calor resulta imprescindible.

Dentro de las aplicaciones más frecuentes merecen citarse:

- Determinación de isotermas en sólidos en calentamiento o enfriamiento.
- Determinación de isotermas teniendo en cuenta el proceso de solidificación a aplicar en fundición de metales y aleaciones en moldes de diversas características.

Cuando la evaluación del problema de transmisión de calor se efectúa a través de una computadora, dicha evaluación se torna precisa y rápida, facilitando enormemente las tareas de diseño y verificación.

En trabajos anteriores hemos considerado la formulación e implementación en la computadora de la D.A.T. de la técnica de Elementos Finitos aplicada a problemas de análisis de tensiones y deformaciones en sólidos o en sistemas estructurales ya sea en régimen estático o en régimen dinámico en / donde las acciones y respuestas son tiempo - dependientes.- (Informes de Febrero 1984 y Marzo 1985 respectivamente.)

En el presente trabajo se tratará la extensión del método a problemas no estructurales, en particular a la transferencia de calor, resaltando de este modo la potencia y el amplio campo de aplicabilidad de las técnicas numéricas empleadas.

En una segunda etapa se elabora la metodología y se modifica el programa desarrollado en la primera etapa, con el fin de introducir el tiempo como variable y poder realizar el cálculo de la distribución de temperaturas en un cuerpo, cuando por ejemplo el flujo de calor es función del tiempo o cuando se incluya el efecto de capacidad calórica.

En estos casos la distribución de temperatura resulta función del tiempo, realizándose el cálculo de las mismas / para intérvalos de tiempo determinados.

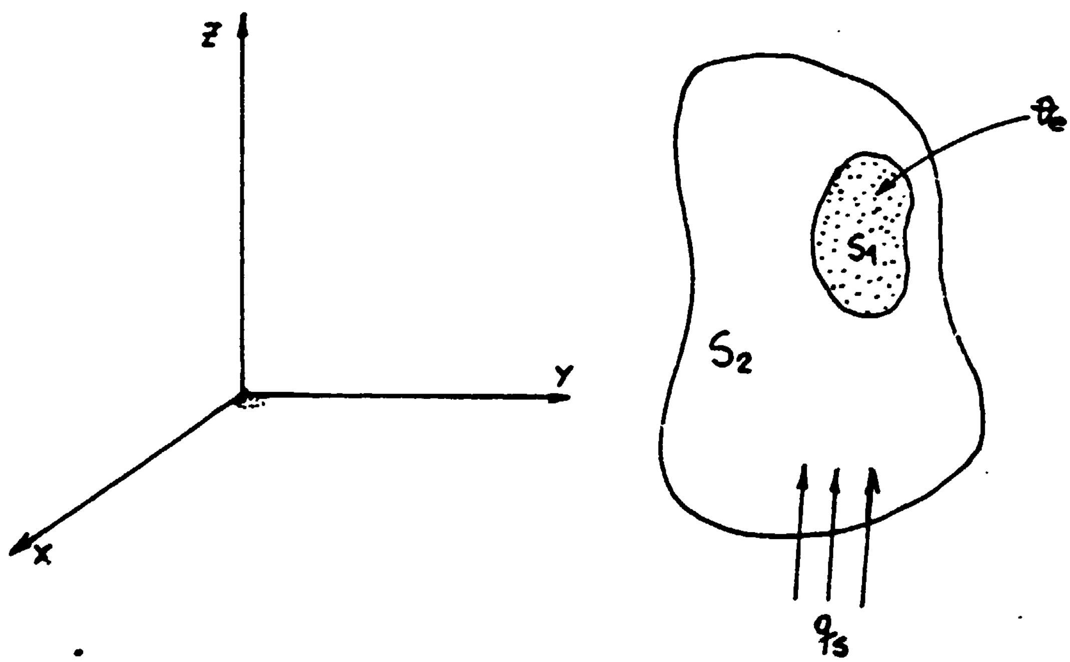
A través de desarrollos específicos se indica la forma en que puede tomarse los cambios de fase y los efectos del calor latente, con vistas a resolver, a través del programa de computación el fenómeno de solidificación.

3.- ACTIVIDADES DESARROLLADAS

3.1. DESARROLLO DEL PROBLEMA DE TRANSMISION DE CALOR

3.1.1. Ecuaciones clásicas para la transmisión de calor.

Se considera un cuerpo tridimensional en condiciones de transmisión de calor.



θ_e representa la temperatura exterior.

k_n representa la conductividad térmica.

q^s representa el flujo de calor ingresado en la superficie del cuerpo.

4.- RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se ha estudiado el problema de la conducción de calor en régimen estacionario y transitorio y en ambos casos en la suposición de que los parámetros que representan el comportamiento del material son constantes.

En los problemas con cambio de estado esto no se verifica, ya que cantidades como la conductividad térmica, calor específico y densidades son diferentes, a veces en forma apreciable, entre las dos fases.

Para lograr mayor precisión en los resultados, sobre todo en los problemas de solidificación, de amplia aplicación en la práctica, se recomienda continuar el presente trabajo y extenderlo al campo no lineal, es decir considerando la variación de los parámetros que definen el comportamiento del material en función de la temperatura y de los fenómenos producidos por el cambio de estado líquido a sólido (o viceversa).-

5.- ASISTENCIA TECNICA

A través de la utilización de los programas objeto del presente trabajo la D.A.T. esta en condiciones de prestar asistencia técnica a industrias que necesiten conocer la / distribución de temperaturas en sólidos, en procesos destinados a tratamiento de metales, a fundición o a problemas especiales en la realización de soldaduras.

Se admite que el material obedece a las leyes de Fourier de la conducción de calor.

$$q_x = -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad q_y = -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad q_z = -k_z \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

q_x, q_y, q_z representan flujo de calor por unidad de área.

k_x, k_y, k_z representan conductividades térmicas.

θ es la temperatura en el cuerpo.

La condición de equilibrio del flujo calórico en el interior del cuerpo es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = -q^B \quad (1)$$

q^B: representa la tasa de calor generado por unidad de volumen

Las condiciónes en la superficie del cuerpo son

$$\theta \Big|_{S_1} = \theta_e \qquad (2)$$

$$k_n \frac{\partial \theta}{\partial n}\Big|_{S_2} = q^S \qquad (3)$$

Estas ecuaciones presuponen los siguientes hechos

- Las partículas del cuerpo están en reposo y no hay movimiento como fluido en el mismo.
- Las condiciones en el cuerpo se analizan desacopladas de las condiciónes de tensión.
- No existen cambios de fase ni efectos de calor latente Para tener en cuenta estos efectos deberemos realizar hipótesis adicionales.

Las condiciónes de borde pueden ser de las siguientes manera en los problemas de transmisión de calor.

- Condiciones de temperatura, es decir que se especifican valores de la misma en puntos y superficie del cuerpo, denominada con S_1 . Ec. (2)
- Condiciones de flujo de calor, es decir se especifican valores del flujo calórico en puntos específicos o superficie del cuerpo. Ec (3)
- Condiciones de convección en el borde

$$q^S = h\ (\theta_e - \theta^S) \qquad (4)$$

donde h es un coeficiente de convección

- Condición de radiación de borde

$$q^S = \mathcal{K}\,(\theta_r - \theta^S) \qquad (5)$$

donde θ_r es la temperatura de una fuente externa radioactiva y $\mathcal{K}$ es un valor a determinar en función de de la y absorción de los materiales y / de factores geométricos.

Si el análisis se realiza en régimen transitorio, las temperaturas iniciales deberán también especificarse.

Para el desarrollo por elementos finitos se puede utilizar una formulación variacional del problema de transferencia de calor o bien aplicar el método de Galerkin en la ecuación diferencial de equilibrio.

Si se utiliza la formulación variacional, las ecuaciones (1) a (3) pueden obtenerse dando una variación $\delta\theta$ a la única variable temperatura (θ) y apelando a la condición de estacionalidad del funcional Π definido para el problema de calor como:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left[k_x\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + k_y\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + k_z\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right] dV - \\ - \int_V \theta\, q^B dV - \int_{S_2} \theta^S q^S dS - \sum_i \theta^i Q^i \qquad (6)$$

en donde se ha empleado la misma notación que en la ecuación (1) y en donde $\dot{Q}^i$ representa un flujo de calor concentrado.

Aplicando al funcional Π la variación mencionada $\delta\theta$, se obtiene:

$$\int_V \delta\theta'^T k\, \theta' dV = \int_V \delta\theta\, q^B dV + \int_{S_2} \delta\theta^S q^S dS + \sum_i \delta\theta^i Q^i \qquad (7)$$

$$\theta'^T = \left[\frac{\partial\theta}{\partial x} \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} \quad \frac{\partial\theta}{\partial z}\right]$$

$$k = \begin{vmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{vmatrix}$$

Se menciona que la integración por partes de esta expresión conduce a las ecuaciones (1) a (3).

Se menciona también que si la variación $\delta\theta$ es interpretada como una variación virtual de la temperatura la ecuación es completamente análoga al principio de los trabajos virtuale en el análisis de tensiones.

En consecuencia la ecuación (7) puede ser interpretada / como una ecuación de equilibrio del flujo de calor ya que establece que la variación del calor transmitido por conducción será igual a la variación del calor generado.-

Dada la similitud del problema de la transmisión de calor con el problema de análisis de tensiones, en cuanto a las ecuaciones que gobiernan el problema, los conceptos utilizados en los trabajos de asesoría anteriores ya mencionados tienen validez.

La principal diferencia es que una sola incógnita, la temperatura deberá ser calculada.

3.1.2. Ecuaciones Incrementales "Paso a Paso"

Para una solución general del problema de transmisión de calor en régimen estacionario o transitorio, y en ambos casos lineal o no lineal, la ecuación (7), que expresa la condición de equilibrio del flujo de calor debe ser expresada en / forma incremental, en el mismo sentido en que fue desarrollado el análisis dinámico de estructuras.

Suponiendo que las condiciones en el tiempo t han sido calculadas y que se quiere calcular la temperatura en el tiempo $t+\Delta t$, siendo Δt el incremento de tiempo, se considera un esquema de integración implícito de Euler.

Para esto se plantea la condición de equilibrio de flujo calórico en el tiempo $t+\Delta t$ al efecto de calcular la temperatura en $t+\Delta t$

$$\int_V \bar{\theta}'^T \, {}^{t+\Delta t}k \, {}^{t+\Delta t}\theta' dV = {}^{t+\Delta t}Q + \int_{S_c} \bar{\theta}^s \, {}^{t+\Delta t}h \left({}^{t+\Delta t}\theta_e - {}^{t+\Delta t}\theta^s \right) dS$$

$$+ \int_{S_r} \bar{\theta}^s \, {}^{t+\Delta t}\kappa \left({}^{t+\Delta t}\theta_r - {}^{t+\Delta t}\theta^s \right) dS \qquad (8)$$

El supraíndice $t+\Delta t$ indica "en el tiempo $t+\Delta t$".
y S_c, S_r indica las áreas superficiales expuestas a convección y radiación respectivamente. La cantidad ${}^{t+\Delta t}Q$ incluye los / efectos del flujo de superficie ${}^{t+\Delta t}q^S$ que no ha incluido / en las condiciones de borde de convección y radiación y además, incluye la generación de calor interno ${}^{t+\Delta t}q^B$

$$\therefore \quad {}^{t+\Delta t}Q = \int_V \overline{\theta}\ {}^{t+\Delta t}q^B\, dV + \int_{S_2} \overline{\theta}^S\ {}^{t+\Delta t}q^S\, dS$$

y en donde, si realizamos el análisis en régimen transitorio

$${}^{t+\Delta t}q^B \Leftarrow {}^{t+\Delta t}q^B - {}^{t+\Delta t}c\ {}^{t+\Delta t}\dot{\theta}$$

Se hace notar que en análisis lineal , que es el objeto del presente trabajo, ${}^{t+\Delta t}k$ y ${}^{t+\Delta t}h$ son constantes. Además no incluyendo las condiciones de borde en cuanto a radiación, la ecuación de equilibrio del flujo calórico (8) puede ser reescrita como

$$\int_V \overline{\theta}'^T k\ {}^{t+\Delta t}\theta' dV + \int_{S_c} \overline{\theta}^S h\ {}^{t+\Delta t}\theta^S dS =$$

$$= {}^{t+\Delta t}Q + \int_{S_c} \overline{\theta}^S h\ {}^{t+\Delta t}\theta_e\, dS \qquad (9)$$

En estas condiciones se puede resolver directamente esta expresión para las temperaturas desconocidas ${}^{t+\Delta t}\theta$

En el régimen general no lineal, con h y K función del tiempo, la linearización de la ecuación (8) debe ser entendida como el primer paso de una iteración de Newton-Raphson dentro del intervalo de tiempo Δt, debiendo iterarse dentro de dicho intervalo de tiempo, actualizando en cada iteración los coeficientes correspondientes.

3.2. DISCRETIZACION EN ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES DE TRANSMISIÓN DE CALOR.

La técnica a utilizar para aplicar la solución por / elementos finitos a las ecuaciones que gobiernan el problema de la transferencia de calor son similares a las aplicadas al análisis de tensiones en régimen estático y dinámico, explicitada en informes anteriores.

Es decir, el cuerpo completo en estudio es idealizado como un conjunto de elementos finitos, obteniendo para el elemento m , en el instante de tiempo $t+\Delta t$

$$ {}^{t+\Delta t}\theta^{(m)} = H^{(m)}\ {}^{t+\Delta t}\theta $$

$$ {}^{t+\Delta t}\theta^{S(m)} = H^{S(m)}\ {}^{t+\Delta t}\theta $$

$$ {}^{t+\Delta t}\theta'^{(m)} = B^{(m)}\ {}^{t+\Delta t}\theta $$

donde el supraíndice (m) indica elemento m ; ${}^{t+\Delta t}\theta$ es el vector de las temperaturas nodales en el tiempo $t+\Delta t$

$$ {}^{t+\Delta t}\theta^{T} = \left[\ {}^{t+\Delta t}\theta_1\ \ {}^{t+\Delta t}\theta_2 \ \cdots\cdots\ {}^{t+\Delta t}\theta_n \right] $$

3.2.1. Régimen Estacionario Lineal

La substitución en la ecuación (9) de los valores definidos por la ecuación (10) permite obtener las ecuaciones correspondientes a elementos finitos en el problema de calor:

$$\left(K^{k} + K^{c} \right) {}^{t+\Delta t}\theta = {}^{t+\Delta t}Q + {}^{t+\Delta t}Q^{e}$$

$$K^{k} = \sum_{m} \int_{V} B^{(m)} k^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$$

es la matriz de conductividad;

$$K^{c} = \sum_{m} \int_{S_c^{(m)}} h^{(m)} H^{S(m)T} H^{S(m)} dV^{(m)}$$

es la matriz de convección;

El vector de entrada de flujo calórico es dado por

$${}^{t+\Delta t}Q = {}^{t+\Delta t}Q_{B} + {}^{t+\Delta t}Q_{S} + {}^{t+\Delta t}Q_{C}$$

$${}^{t+\Delta t}Q_{S} = \sum_{m} \int_{S_2^{(m)}} H^{S(m)T} \, {}^{t+\Delta t}q^{S(m)} dS^{(m)}$$

$${}^{t+\Delta t}Q_{B} = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \, {}^{t+\Delta t}q^{B(m)} dV^{(m)}$$

${}^{t+\Delta t}Q_c$ es el vector de flujos de entrada concentrados nodales.

El término ${}^{t+\Delta t}Q^e$ es debido a las condiciones de convección en el borde. Usando la interpolación de temperatura / de elementos de superficie para definir la temperatura ${}^{t+\Delta t}\theta_e$ en los elementos de superficie en términos de las temperaturas nodales datos de la superficie ${}^{t+\Delta t}\theta_e$ tenemos

$$ {}^{t+\Delta t}Q^e = \sum_m \int_{S_c^{(m)}} h^{(m)} H^{S(m)T} H^{S(m)}\ {}^{t+\Delta t}\theta_e \, dS^{(m)} $$

3.2.2. Régimen Transitorio Lineal.

En este caso los efectos de la capacidad calórica pueden ser incluidos en el análisis como parte de la tasa de calor generada.

Utilizando un esquema de integración implícito hacia atrás de Euler, las ecuaciones a utilizar pueden obtenerse de las vistas para el régimen estacionario.

Definiendo

$$ \dot{\theta}^{(m)}(x,y,z,t) = H^{(m)}(x,y,z)\ \dot{\theta}(t) $$

Usando la relación

$$ {}^{t+\Delta t}Q_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \left({}^{t+\Delta t}q^{B(m)} - {}^{t+\Delta t}c^{(m)} H^{(m)}\ {}^{t+\Delta t}\dot{\theta} \right) dV^{(m)} $$

donde ${}^{t+\Delta t}q^{B(m)}$ no incluye más de la tasa en la cual el ca-
lor es almacenado dentro del material.

El análisis transitorio lineal, las ecuaciones de
transmisión de calor en elementos finitos son

$$C\,{}^{t+\Delta t}\dot{\theta} + (K^{k} + K^{c})\,{}^{t+\Delta t}\theta = {}^{t+\Delta t}Q + {}^{t+\Delta t}Q^{e}$$

donde

$$C = \sum_{m} \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} c^{(m)} H^{(m)} \, dV^{(m)}$$

es la matriz de capacidad de calor.

Por analogía con lo visto en análisis dinámico de es-
tructuras esta matriz de capacidad de calor es "consist

Siguiendo los conceptos vistos en análisis dinám
es posible introducir una matriz de capacidad concentrad
un vector flujo de entrada de calor concentrado, usando
piadamente áreas de influencia o contribución para cada

Si se usa un esquema de integración explícito la
ción de las temperaturas desconocidas en $t+\Delta t$ se obtien
siderando la condición de equilibrio de flujo calórico e
tiempo

$$C\,{}^{t}\dot{\theta} = {}^{t}Q + {}^{t}Q^{c} - {}^{t}Q^{k}.$$

donde los vectores de flujo calórico concentrados nodale
calculados usando las expresiones apropiadas.

3.2.3. Cambios de Estado

Una importante aplicación de los programas objeto del presente trabajo lo constituye la simulación del proceso de fundición, en donde es necesario considerar el fenómeno de cambio de estado que ocurre en el proceso de solidificación.

Este problema involucra considerables dificultades, ya que va acompañado por la liberación (o absorción) del calor latente en la zona activa, es decir en la interfase sólido - líquido, interfase que se mueve en función del tiempo.

Este calor latente es energía liberada utilizada en parte en la formación de la superficie sólida y en parte redistribuida en el sistema por un mecanismo de conducción.

En realidad las constantes de la fase líquidas y sólidas son muy diferentes lo que hace que el problema sea no lineal respecto a las propiedades del material.

En este trabajo se aceptan las consideraciones de linealidad, dejando para una segunda etapa el tratamiento de la no linealidad física (Ver 5.- Recomendaciones).-

Este problema sera tratado como un problema en régimen transitorio y en donde, se considerará la liberación del calor latente, para lo cual en la ecuación de equilibrio de flujo (1) deberá considerarse el término

$$\rho L \frac{\partial f_s}{\partial \theta}$$

en donde ρ representa la densidad, L representa el calor latente de enfriamiento y f_s la fracción de sólido.

Suponiendo que no existan fuentes interiores y que los parámetros de los materiales sean independientes de la temperatura (caso lineal), la ecuación de equilibrio puede expresarse.

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \nabla^2 \theta + \rho L \frac{\partial f_s}{\partial \theta}$$

ó

$$\rho \left(c - L \frac{\partial f_s}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \nabla^2 \theta$$

Las técnicas más difundidas para tomar en cuenta el calor latente durante la solidificación

1) Método del calor específico equivalente.

Es uno de los métodos más frecuentemente usados. El calor latente de enfriamiento es convertido apropiadamente a calor específico y adicionado al término correspondiente / del calor específico dentro del rango de temperaturas en que el proceso de solidificación ocurre.

Definiendo $C_E = c - L\frac{\partial f_s}{\partial \theta}$, C_E será una función de la fracción sólida o de la temperatura.

Resulta

$$\rho C_E \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \nabla^2 \theta$$

Una forma simplificada de resolución consiste en suponer una distribución lineal del calor latente sobre el rango de solidificación, siendo necesario procesos iterativos para arribar a la solución.

2) Método del calor contenido.

Esta técnica está basada en la observación que la entalpía H , que es la integral de la capacidad con respecto a la temperatura

$$H = \int_{\theta_0}^{\theta} c \, d\theta$$

es una función "alisada" de la temperatura en el rango de solidificación, aún cuando el calor específico muestre una rápida variación en el mismo rango.

3) Método de la recuperación de temperatura.

Este método consiste en transformar el calor latente en un número de grados equivalentes dividiendo el calor latente por el calor específico. La temperatura en un nodo es calculada en ausencia del calor latente y como se efectúa una iteración en el tiempo, luego de cada paso de tiempo, las temperaturas que caen por debajo del punto de solidificación son forzadas a valores correspondientes a la solidificación, hasta / que la solidificación se completa.

En este método el calor latente liberado ΔQ_{BL} y la correspondiente fracción de incremento sólido Δf_s sobre el paso de tiempo Δt son calculadas de la forma siguiente:

$$\Delta Q_{BL} = \rho c V \Delta\theta = \rho L V \Delta f_s$$

donde V es el volumen del elemento considerado y $\Delta\theta$ es la caída de la temperatura desde el punto de solidificación en el intervalo de tiempo .

La fracción sólida será

$$f_s = \Sigma \Delta f_s$$

Este procedimiento se repite hasta que la solidificación se completa en el elemento, es decir hasta que

$$f_s = 1$$

3.2.4. Conclusiones

Por todo lo expuesto anteriormente el método de elementos finitos se revela como sumamente eficaz para la realización de programas de transmisión de calor.

Para el régimen estacionario se utiliza un esquema de cálculo similar al empleado en análisis estático de tensiones

Para el régimen transitorio se utiliza un esquema de integración explícito en el tiempo poniendo a la temperatura como parámetro nodal función del tiempo.

El cambio de estado, es decir el paso de la fase líquida a la sólida, se tendrá en cuenta en los programas a través del concepto de recuperación de temperatura ya mencionado, en razón de la simplicidad de su implementación.

3.3. PROGRAMAS DE COMPUTACION PARA TRANSMISION DE CALOR POR ELEMENTOS FINITOS.

3.3.1. Régimen Estacionario Lineal.

Generalidades y Técnicas de resolución.

En informes anteriores se han desarrollado los programas de elementos finitos para el análisis de tensiones, para el caso de cargas estáticas y dinámicas, o sea dependientes del tiempo.

Los mismos métodos desarrollados son aplicables a una gran cantidad de problemas físicos, en donde las ecuaciones de continuidad o equilibrio que manejan dichos problemas adoptan la forma de una ecuación "cuasi - armónica" general, pudiendo llegarse a procesos unificados que con ligeras variantes y con la adecuada interpretación de la variable física / puesta en juego permiten resolver una amplia gama de problemas.

En este sentido el desarrrollo del programa para el / análisis de transmisión de calor en régimen estacionario lineal seguirá los lineamientos del programa de análisis estático de tensiones.

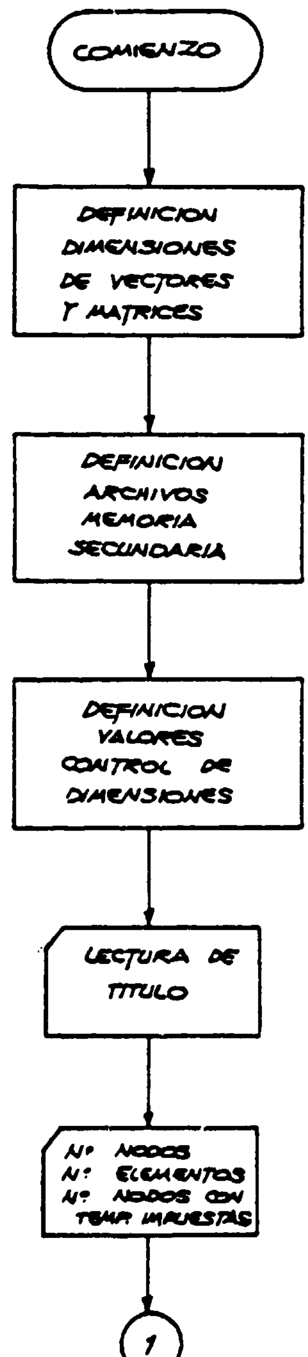
La lectura de datos generales, de coordenadas de nodos, de valores de las incógnitas impuestas en el contorno, de las conectividades y tipo de elementos y características de los materiales y de los flujos calóricos impuesto en el contorno del cuerpo siguen los ordenamientos previamente establecidos para los casos de análisis estático y dinámico.

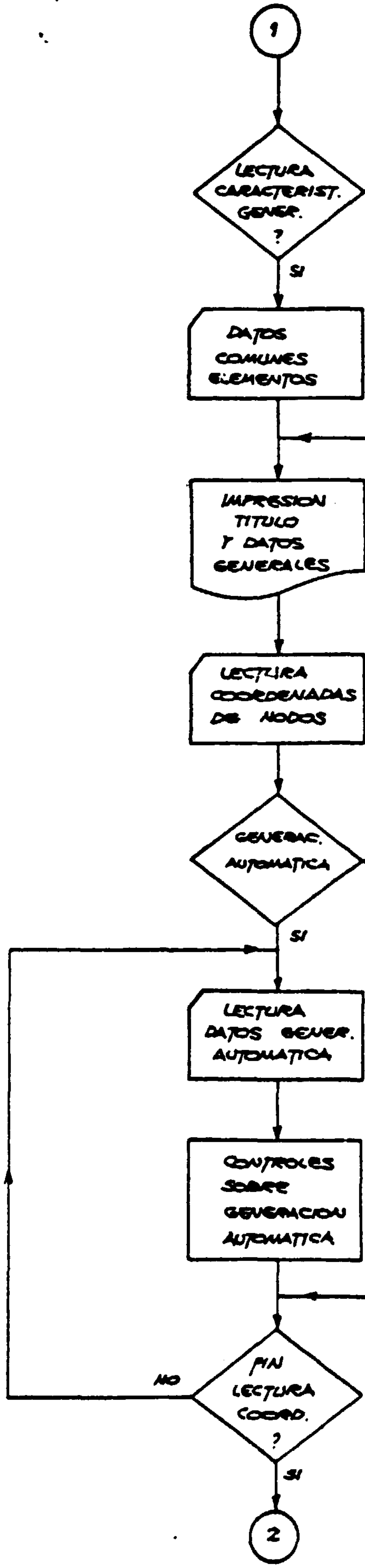
El almacenamiento de la matriz del sistema es realizado para media banda y con almacenamiento tipo "skyline" en la memoria principal de la computadora lo que proporciona ahorro de memoria y velocidad en la ejecución, siendo un esquema óptimo para problemas de pequeña a mediana magnitud.

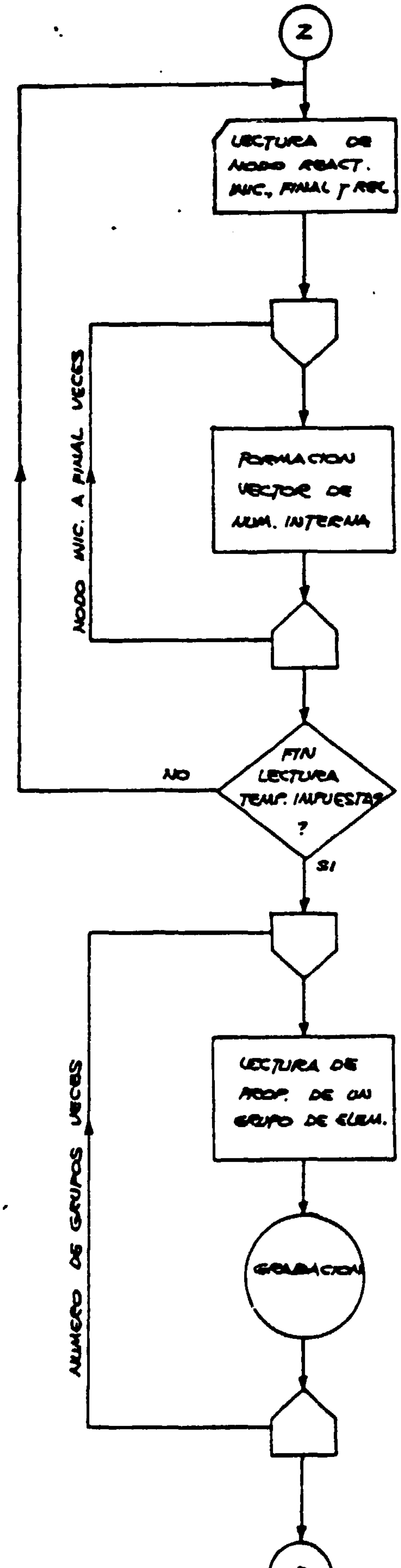
Se presenta a continuación el organigrama del programa para transmisión de calor, en régimen estacionario y lineal, por el método de elementos finitos.

ORGANIGRAMA

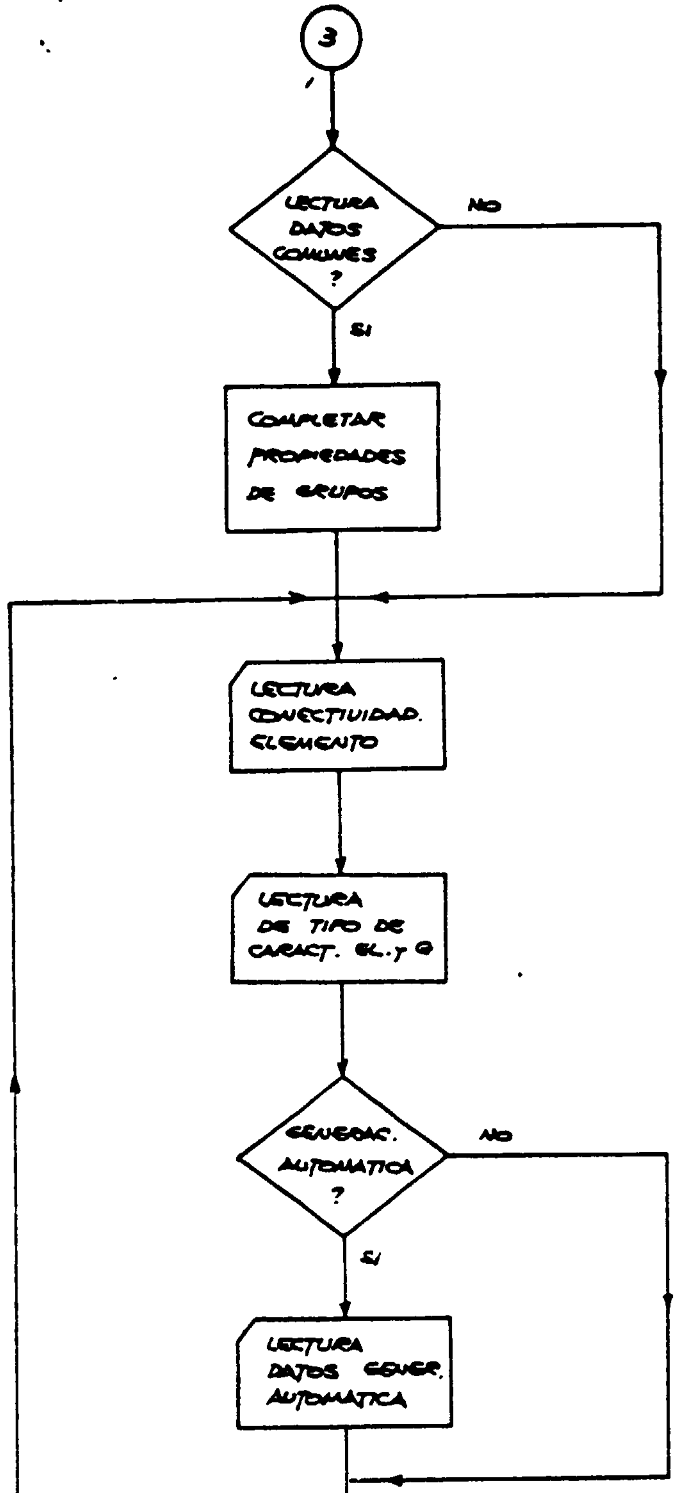
PROGRAMA DE CALCULO LINEAL PARA TRANSMISION DEL CALOR - REGIMEN ESTACIONARIO

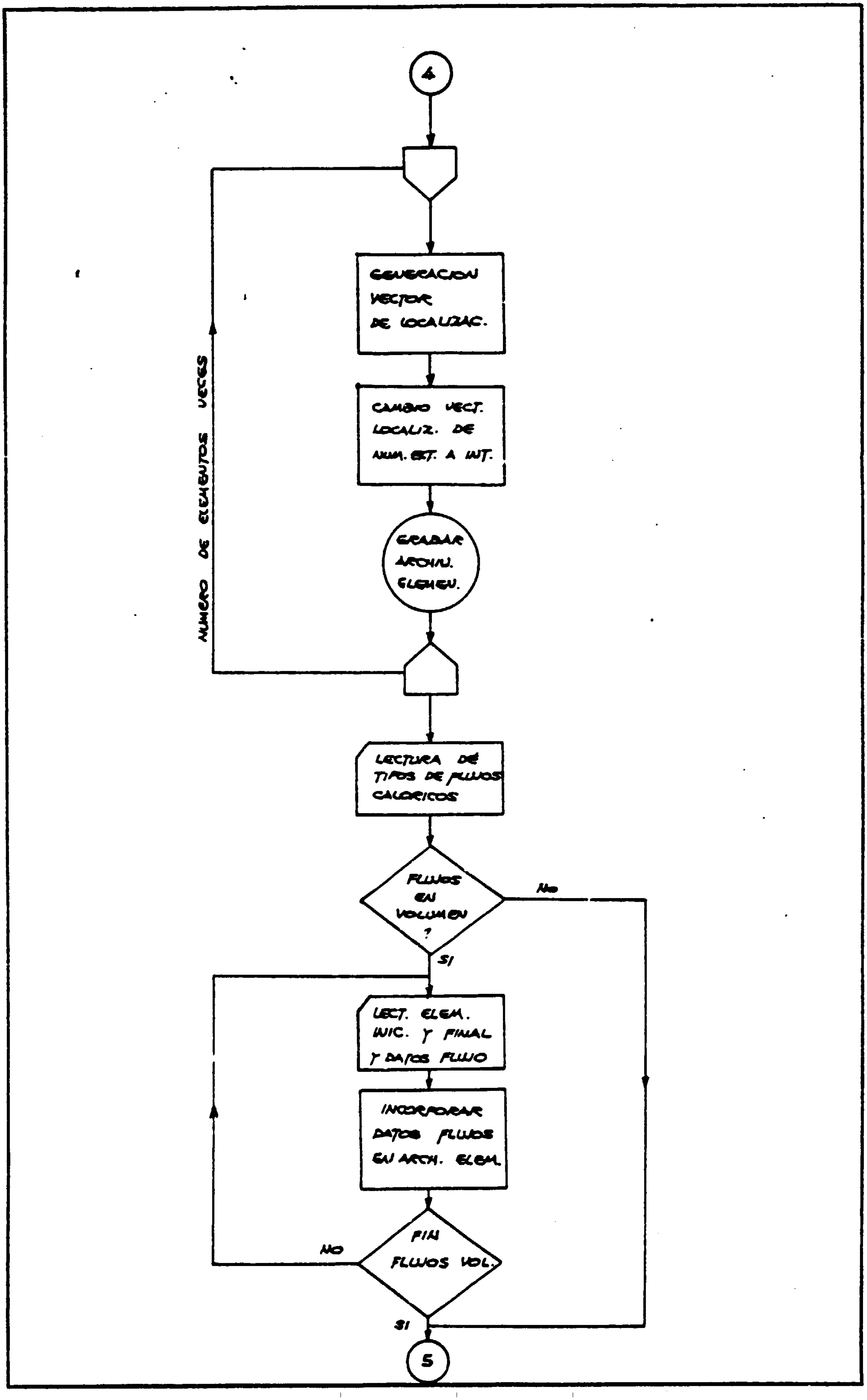


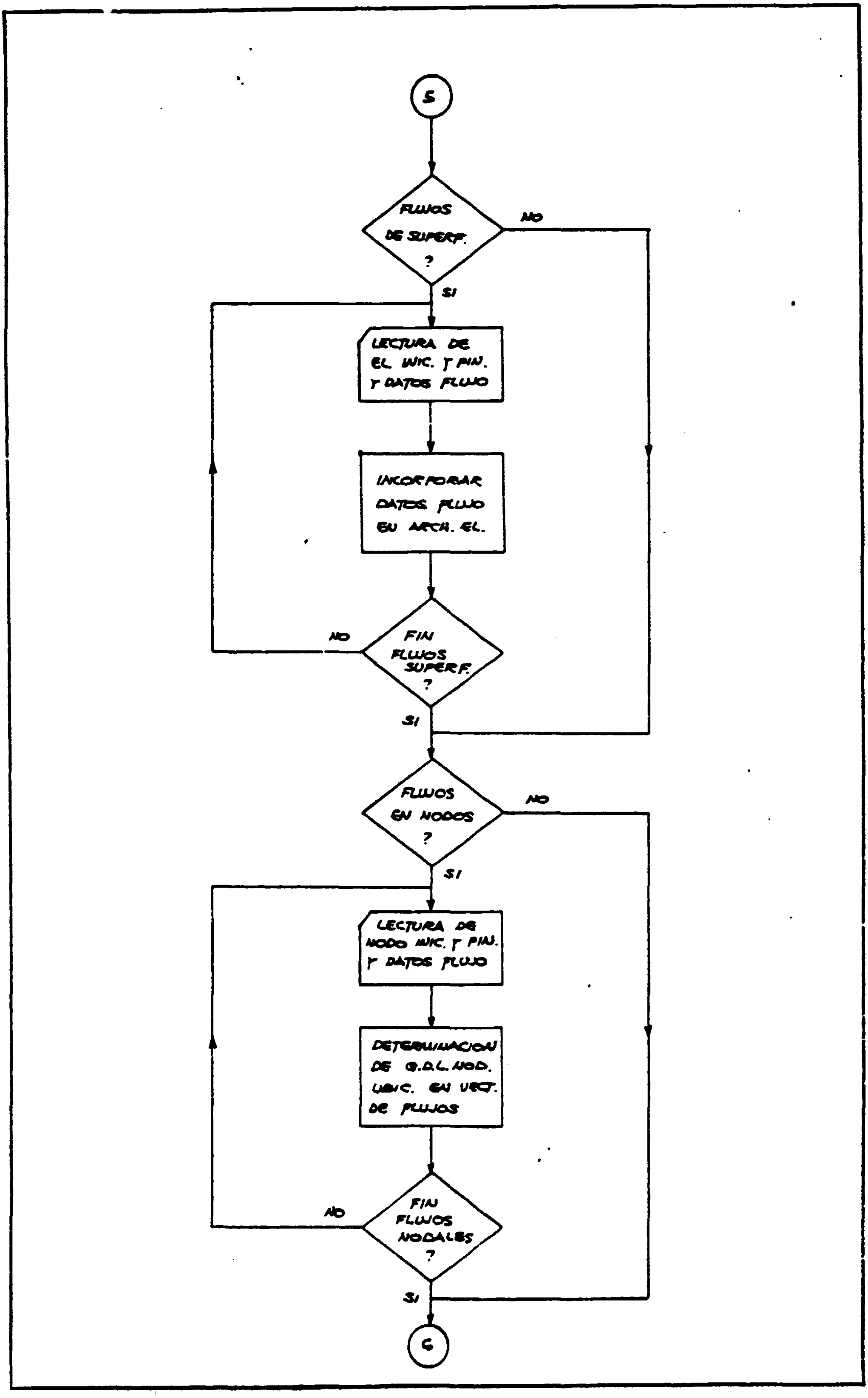

1
LECTURA CARACTERIST. GENER. ?
NO
SI
DATOS COMUNES ELEMENTOS
IMPRESION TITULO Y DATOS GENERALES
LECTURA COORDENADAS DE NODOS
GENERAC. AUTOMATICA
NO
SI
LECTURA DATOS GENER. AUTOMATICA
CONTROLES SOBRE GENERACION AUTOMATICA
NO
FIN LECTURA COORD. ?
SI
2



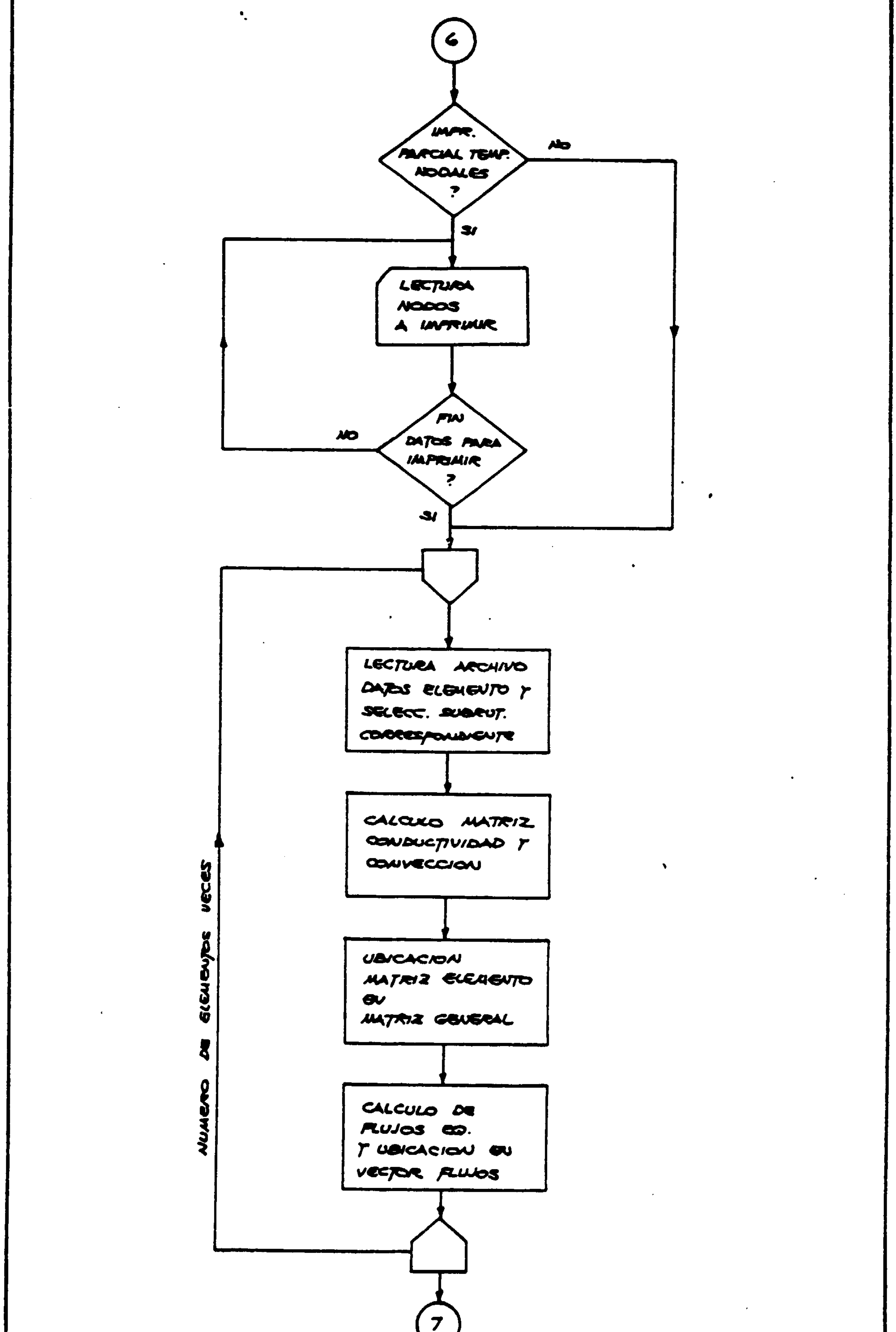
2
LECTURA DE
NODO REACT.
INIC., FINAL Y REC.
NODO INIC. A FINAL VECES
FORMACION
VECTOR DE
NUM. INTERNA
NO
FIN
LECTURA
TEMP. IMPUESTAS
?
SI
NUMERO DE GRUPOS VECES
LECTURA DE
PROP. DE UN
GRUPO DE ELEM.
GRABACION
3


3
LECTURA DATOS COMUNES ?
NO
SI
COMPLETAR PROPIEDADES DE GRUPOS
LECTURA CONECTIVIDAD. ELEMENTO
LECTURA DE TIPO DE CARACT. EL. y Q
GENERAC. AUTOMATICA ?
NO
SI
LECTURA DATOS GENER. AUTOMATICA
FIN LECTURA DATOS ELEM ?
NO
SI
4

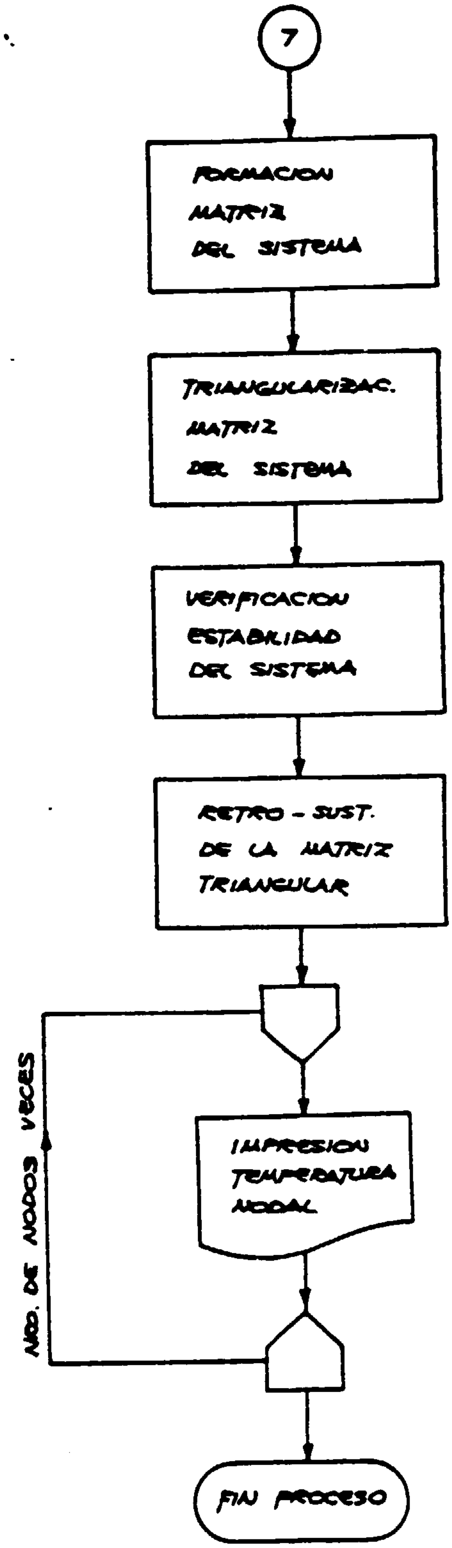

4
GENERACION VECTOR DE LOCALIZAC.
CAMBIO VECT. LOCALIZ. DE NUM. EXT. A INT.
GRABAR ARCHIV. ELEMEN.
NUMERO DE ELEMENTOS VECES
LECTURA DE TIPOS DE FLUJOS CALORICOS
FLUJOS EN VOLUMEN ?
NO
SI
LECT. ELEM. INIC. Y FINAL Y DATOS FLUJO
INCORPORAR DATOS FLUJOS EN ARCH. ELEM.
FIN FLUJOS VOL.
NO
SI
5



5
FLUJOS DE SUPERF. ?
NO
SI
LECTURA DE EL. INIC. Y FIN. Y DATOS FLUJO
INCORPORAR DATOS FLUJO EN ARCH. EL.
NO
FIN FLUJOS SUPERF. ?
SI
FLUJOS EN NODOS ?
NO
SI
LECTURA DE NODO INIC. Y FIN. Y DATOS FLUJO
DETERMINACION DE G.D.L. NOD. UBIC. EN VECT. DE FLUJOS
NO
FIN FLUJOS NODALES ?
SI
6



6
IMPR. PARCIAL TEMP. NODALES ?
NO
SI
LECTURA NODOS A IMPRIMIR
FIN DATOS PARA IMPRIMIR ?
NO
SI
LECTURA ARCHIVO DATOS ELEMENTO Y SELECC. SUBRUT. CORRESPONDIENTE
CALCULO MATRIZ CONDUCTIVIDAD Y CONVECCION
UBICACION MATRIZ ELEMENTO EN MATRIZ GENERAL
CALCULO DE FLUJOS EQ. Y UBICACION EN VECTOR FLUJOS
NUMERO DE ELEMENTOS VECES
7


7
FORMACION MATRIZ DEL SISTEMA
TRIANGULARIZAC. MATRIZ DEL SISTEMA
VERIFICACION ESTABILIDAD DEL SISTEMA
RETRO - SUST. DE LA MATRIZ TRIANGULAR
NRO. DE NODOS VECES
IMPRESION TEMPERATURA NODAL
FIN PROCESO

3.3.2 Régimen Transitorio lineal. Generalidades, Técnicas de Resolución y Organigrama.

Como ya se ha mencionado anteriormente, para este caso se introduce el tiempo como variable, y es nece- sario utilizar un esquema de integración en el tiemp para resolver el problema

Si consideramos una ecuación típica de un grado de libertad:

$$\dot{\theta} + k\theta = q \qquad \theta\Big|_{t=0} = {}^{0}\theta \quad (1$$

donde θ = temperatura

$\dot{\theta}$ = variación de θ en el tiempo

q = flujo de entrada de calor al sistema

un conjunto de operadores de integración que pueden usarse efectivamente en la solución de (11), se define por

$$ {}^{t+\alpha\Delta t}\dot{\theta} = \left({}^{t+\alpha\Delta t}\theta - {}^{t}\theta \right) / \Delta t \qquad ($$

$$ {}^{t+\alpha\Delta t}\theta = (1-\alpha)\, {}^{t}\theta + \alpha \, {}^{t+\Delta t}\theta $$

donde α es una constante cuyo valor se define para dar un óptimo de estabilidad y presición.

Para resolver el sistema para ${}^{t+\Delta t}\theta$ se procede de la siguiente manera:

como el valor de la temperatura en el intervalo anterior de tiempo, ${}^{t}\theta$,es conocid se usa la ecuación (11) en el tiempo $t+\alpha\Delta t$ y las ecuaciones(12) para calcular el valor deseado ${}^{t+\Delta t}$

Las propiedades del proceso de integración dependen del valor de α empleado.

Si $\alpha=0$ resulta el método implícito de Euler (hacia adelante), método estable si $\Delta t \leq 2/k$

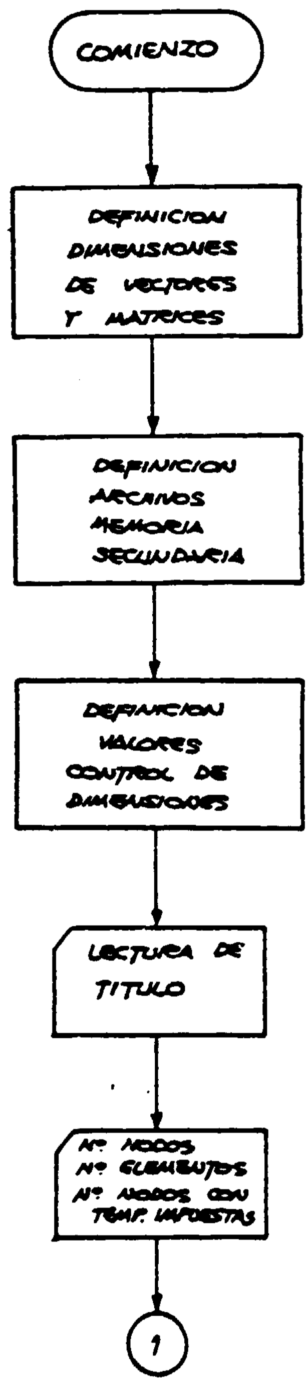
Si $\alpha=1/2$ resulta la regla implícita trapezoidal, incondi incondicionalmente estable.

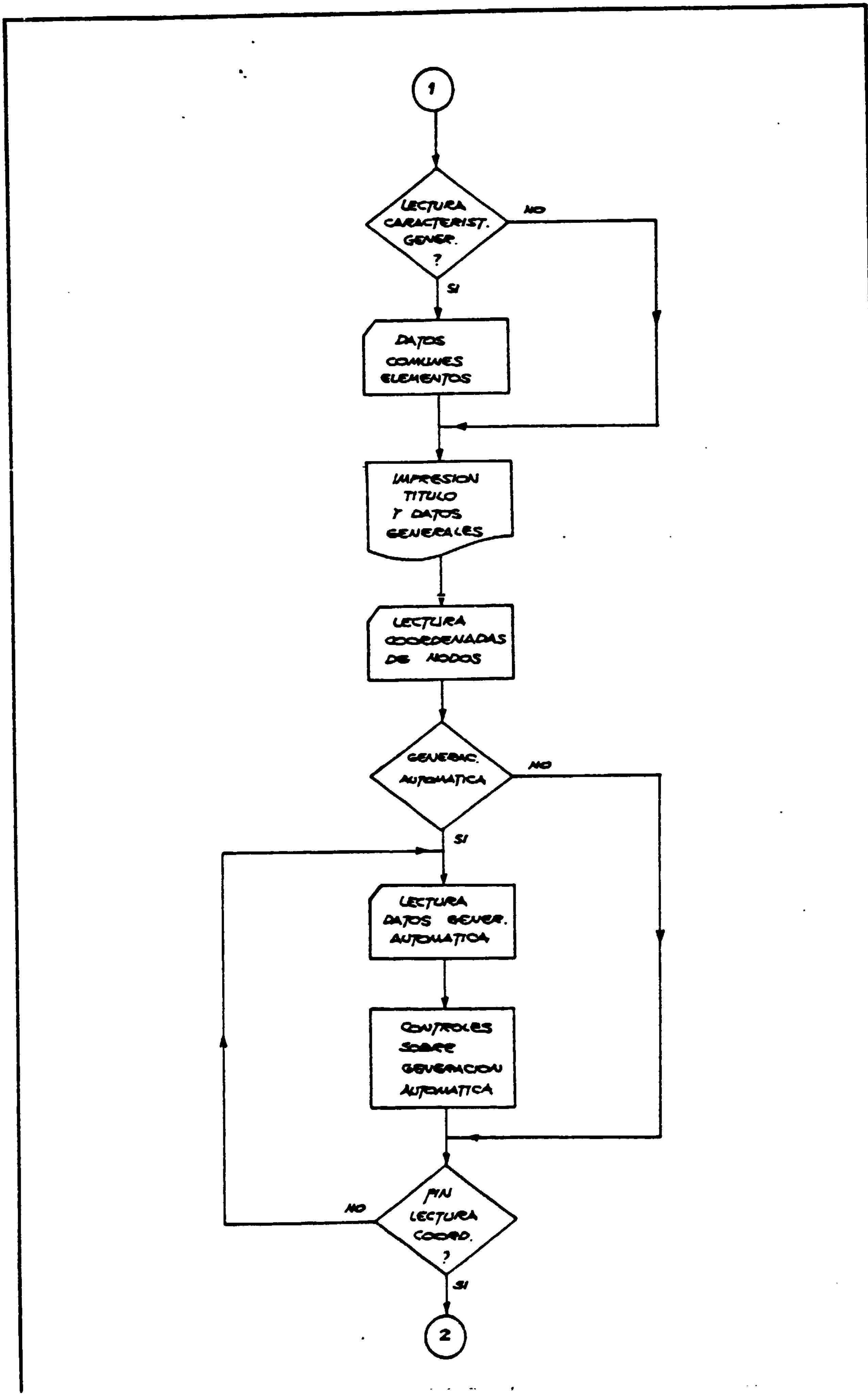
Si $\alpha=1$ resulta el método implícito de Euler (hacia atrás), incondicionalmente estable.

A continuación se presenta el organigrama del programa para transmision de calor en régimen transitorio y lineal , por el método de elementos finitos.

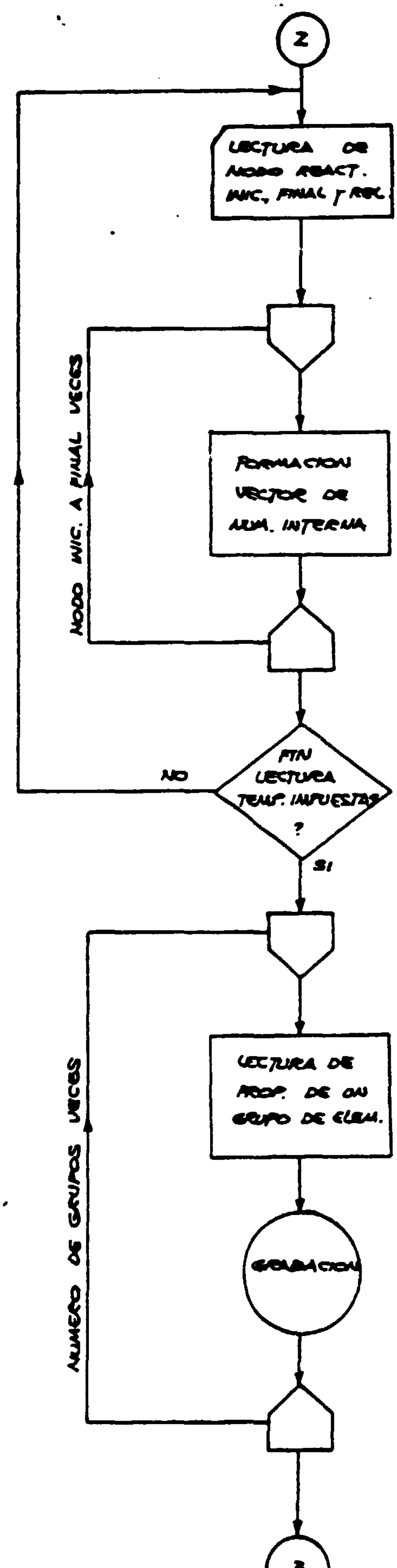
ORGANIGRAMA

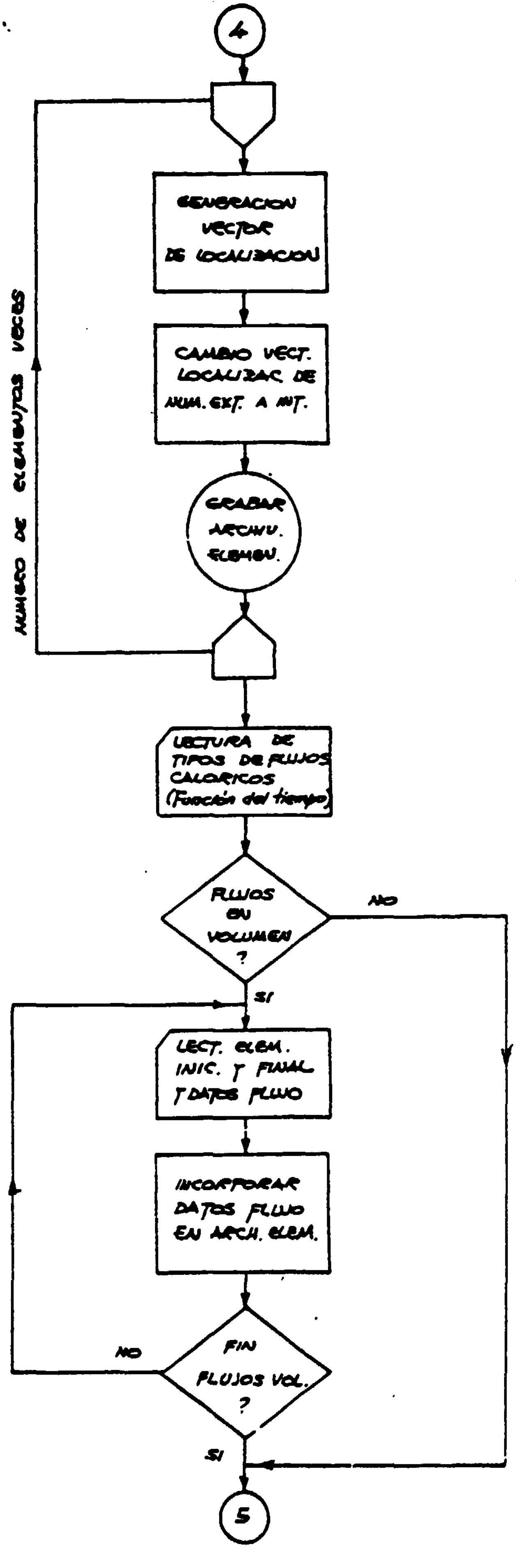
PROGRAMA DE CALCULO LINEAL PARA TRANSMISION DEL CALOR - REGIMEN TRANSITORIO

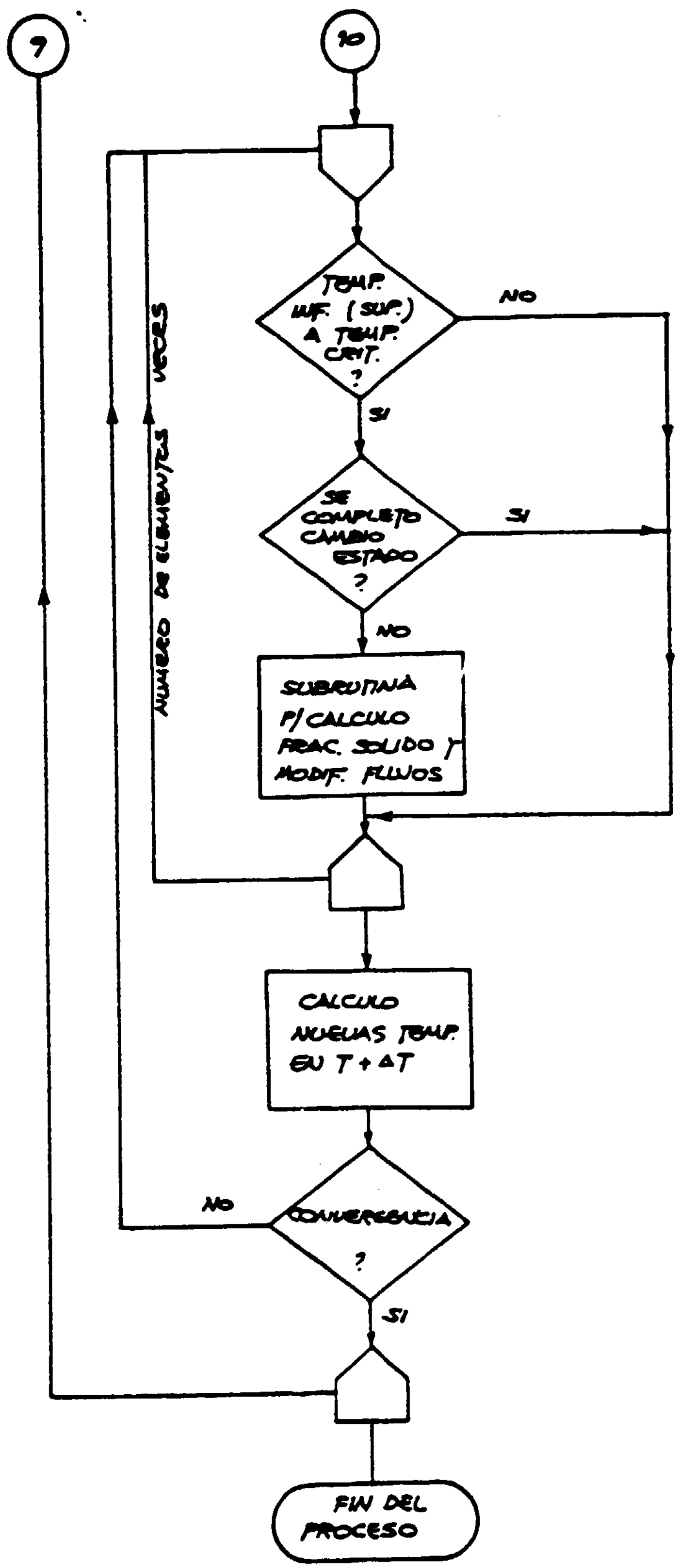




1
LECTURA CARACTERIST. GENER. ?
NO
SI
DATOS COMUNES ELEMENTOS
IMPRESION TITULO Y DATOS GENERALES
LECTURA COORDENADAS DE NODOS
GENERAC. AUTOMATICA
NO
SI
LECTURA DATOS GENER. AUTOMATICA
CONTROLES SOBRE GENERACION AUTOMATICA
FIN LECTURA COORD. ?
NO
SI
2


2
LECTURA DE NODO REACT. INIC., FINAL Y REC.
FORMACION VECTOR DE NUM. INTERNA
NODO INIC. A FINAL VECES
FIN LECTURA TEMP. IMPUESTAS ?
NO
SI
LECTURA DE PROP. DE UN GRUPO DE ELEM.
GRABACION
NUMERO DE GRUPOS VECES
3


4
GENERACION VECTOR DE LOCALIZACION
CAMBIO VECT. LOCALIZAC. DE NUM. EXT. A INT.
GRABAR ARCHIV. ELEMEN.
NUMERO DE ELEMENTOS VECES
LECTURA DE TIPOS DE FLUJOS CALORICOS (Función del tiempo)
FLUJOS EN VOLUMEN ?
NO
SI
LECT. ELEM. INIC. Y FINAL Y DATOS FLUJO
INCORPORAR DATOS FLUJO EN ARCH. ELEM.
FIN FLUJOS VOL. ?
NO
SI
5



7
10
TEMP. INF. (SUP.) A TEMP. CRIT. ?
NO
SI
SE COMPLETO CAMBIO ESTADO ?
SI
NO
SUBRUTINA P/CALCULO FRAC. SOLIDO Y MODIF. FLUJOS
NUMERO DE ELEMENTOS VECES
CALCULO NUEVAS TEMP. EN T + ΔT
NO
CONVERGENCIA ?
SI
FIN DEL PROCESO

4.- RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se ha estudiado el problema de la conducción de calor en régimen estacionario y transitorio y en ambos casos en la suposición de que los parámetros que representan el comportamiento del material son constantes.

En los problemas con cambio de estado esto no se verifica, ya que cantidades como la conductividad térmica, calor específico y densidades son diferentes, a veces en forma apreciable, entre las dos fases.

Para lograr mayor precisión en los resultados, sobre todo en los problemas de solidificación, de amplia aplicación en la práctica, se recomienda continuar el presente trabajo y extenderlo al campo no lineal, es decir considerando la variación de los parámetros que definen el comportamiento del material en función de la temperatura y de los fenómenos producidos por el cambio de estado líquido a sólido (o viceversa).-

5.- ASISTENCIA TECNICA

A través de la utilización de los programas objeto del presente trabajo la D.A.T. esta en condiciones de prestar asistencia técnica a industrias que necesiten conocer la / distribución de temperaturas en sólidos, en procesos destinados a tratamiento de metales, a fundición o a problemas especiales en la realización de soldaduras.